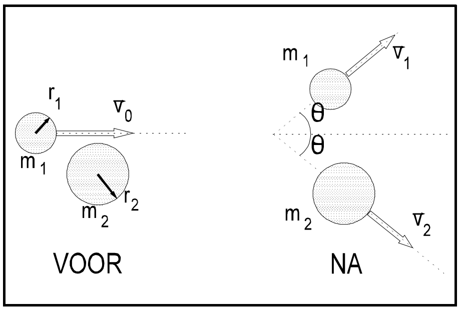
Tijd van 14:00 - 17:00 uur

MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART VEL, voorzien van je **naam.**
Op vel 1: **studentnummer, naam, adres, postkode, woonplaats** en **studierichting.**
De onderdelen van de opgaven zijn veelal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Ook al kun je een bepaald onderdeel niet oplossen, **probeer dan toch het vervolg** van de opgave.

Opgave 1.

Een schijf met massa m_1 botst met een snelheid $\vec{v}_0$ op een stilstaande schijf met massa m_2.

Na de botsing hebben m_1 en m_2 een snelheid $\vec{v}_1$ resp. $\vec{v}_2$. De snelheden $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ maken beide een hoek θ met $\vec{v}_0$ (zie figuur 1).



Figuur 1.

a. <u>Bereken</u> de grootte van de snelheden $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$, uitgedrukt in m_1, m_2, θ en v_0.

b. <u>Bereken</u> het verlies in kinetische energie ΔK tengevolge van de botsing , uitgedrukt in m_1, m_2, θ en v_0.

c. <u>Bereken</u> de waarden die de hoek θ kan aannemen als de botsing **volkomen** elastisch is.

Opgave 2. "De aarde als schietschijf"

In een artikel in de Volkskrant uit 1992 wordt de kans besproken dat de komeet Swift-Tuttle in 2126 met de aarde in botsing komt. De komeet bevindt zich dan in het punt van z'n baan dat het dichtst bij de zon gelegen is. Veronderstel dat de baan van de komeet om de zon ellips-vormig is, in hetzelfde vlak ligt als de baan van de aarde om de zon en beide banen elkaar raken op de lange as van de komeetbaan (zie figuur 3).

HOE GROOT IS de kans dat de aarde in het jaar 2126 getroffen wordt door komeet Swift-Tuttle? Niet bijster groot. Verwaarloosbaar klein eigenlijk. Brian Marsden van het telegrambureau van de Internationale Astronomische Unie (IAU) in Cambridge, Massachusetts, berekende de baan van de komeet en kwam tot de conclusie dat Swift-Tuttle waarschijnlijk op 11 juli 2126 de kleinste afstand tot de zon bereikt.

Marsden realiseerde zich echter dat zijn berekeningen nooit exact kunnen zijn, omdat er allerlei onvoorspelbare baanstoringen kunnen optreden. Wanneer de komeet een paar weken later zou verschijnen dan voorspeld, kan een botsing met de aarde op 14 augustus 2126 niet geheel worden uitgesloten.

Figuur 2. Een artikel in de Volkskrant waarin de kans van een treffen van de aarde in 2126 met de komeet Swift-Tuttle, besproken wordt.

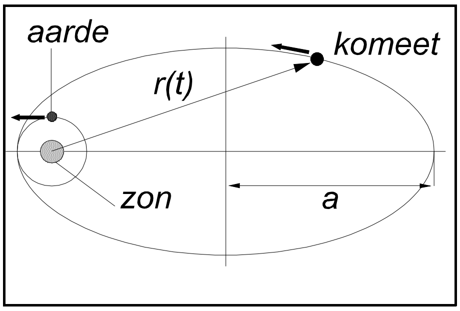
a. Volgens Keppler geldt voor alle lichamen die een ellipsvormige baan rond de zon met massa M uitvoeren:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot a^3$$

waarin T de periode is en $2a$ de lengte van de lange as van de ellips (zie figuur 3).
Gegeven is dat de periode van de komeet 268 jaar is en dat de straal van de baan van de aarde om de zon:

$$r_{aarde} = 0{,}15 \,.\, 10^{12} m.$$

<u>Bereken</u> de maximale afstand r_+ van de komeet tot de zon met gebruikmaking van uitsluitend en alleen de gegevens uit deze opgave.



Figuur 3.

einde

3a. $\frac{x}{L} \,.\, m \,.\, g = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{g}{L} x$

b. $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$; uit $\dot{x}(0) = 0 \rightarrow A = B$ en uit

$$x(0) = \frac{L}{2} \quad \rightarrow \quad A + B = \frac{L}{2} \quad \rightarrow \quad A = B = \frac{L}{4}$$

c.

$$L \quad \rightarrow \quad e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0} = 4 \quad \rightarrow \quad e^{\omega t_0} = 2 \pm \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

d. Invullen in $\dot{x}(t) = \omega \frac{L}{4}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$ levert: $\dot{x}(t_0) = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$. Dit resultaat kan ook bereikt worden door een energievergelijking op te stellen:

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2(t_0) = \frac{m}{2} gL + \frac{m}{2} g \frac{3}{4} L - mg\frac{L}{2} = \frac{3}{8} mg$$

4a. $I_O = \frac{1}{3} mL^2$

b. $I_O\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}\cos(\theta) \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos(\theta)$

c.

$$\dot{\theta}^2 - mg\frac{L}{2}\sin(\theta) = \frac{1}{6} mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mgL\sin(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = \sqrt{}$$

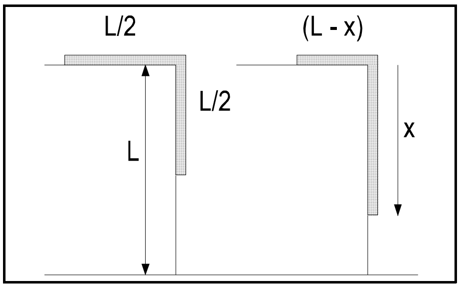
2b. Voor ellipsvormige banen in een gravitatieveld geldt voor de straal als functie van de tijd:

$$r(t) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon . \cos(\frac{2\pi}{T} . t)}$$ waarin ε de excentriciteit is.

Bereken de excentriciteit van de baan van de komeet.

Opgave 3.

Een ketting met lengte L en massa m , hangt voor de helft over de rand van een tafel met een hoogte L (zie figuur 4). Nadat men de ketting heeft losgelaten, ondervindt deze een versnelde beweging. Verwaarloos alle wrijving.



Figuur 4.

a. Leidt de bewegingsvergelijking voor de ketting af uitgedrukt in x, waarbij x het deel van de ketting is dat over de rand hangt.

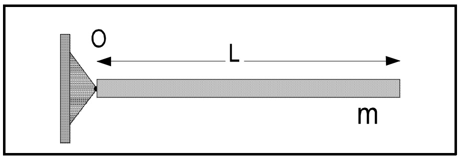
b. Laat zien dat $x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ voldoet aan de vergelijking en druk A , B en ω uit in de gegeven grootheden.

c. Bereken het tijdstip waarop de onderste schakel van de ketting de grond raakt. [Hint: Stel $e^{\omega t} = u$ en los eerst de vergelijking in u op]

d. Bereken de snelheid waarmee de onderste schakel van de ketting de grond raakt.

Opgave 4.

Een homogene balk, met een lengte L en massa m kan zonder wrijving scharnieren rond een punt O (zie figuur 5a). Vanuit horizontale stand wordt de balk losgelaten.

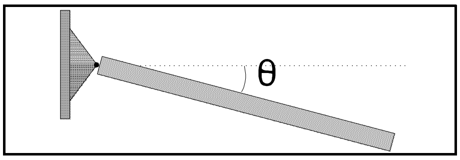


Figuur 5a.

a. Bereken het traagheidsmoment van de balk ten opzichte van het punt O.

b. Laat zien dat de bewegingsvergelijking voor het draaien van de balk rond O (zie figuur 5b) gegeven wordt door:

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos(\theta)$$

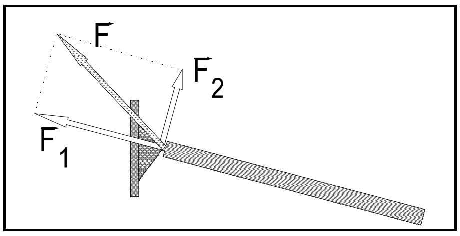


Figuur 5b.

c. Geef de totale energie van de vallende balk als functie van de hoek θ en hoeksnelheid $\dot{\theta}$ en leidt daaruit een vergelijking af voor $\dot{\theta}$ als functie van θ.

d. In het punt O wordt een kracht $\vec{F}$ op de balk uitgeoefend met een component F_1 evenwijdig aan de balk en een component F_2 loodrecht op de balk (zie figuur 5c).

Bereken de componenten F_1 en F_2 als functie van de hoek θ , met gebruikmaking van de resultaten in b) en c).
[Hint: schrijf de bewegingsvergelijking van het zwaartepunt op in poolcoördinaten.]



Figuur 5c.

1a. $m_1 v_1 \sin(\theta) = m_2 v_2 \sin(\theta)$ en $m_1 v_0 = (m_1 v_1 + m_2 v_2)\cos(\theta)$

zodat: $v_1 = \dfrac{v_0}{2\cos(\theta)}$ en $v_2 = \dfrac{m_1}{m_2}\dfrac{v_0}{2\cos(\theta)}$

b. $\Delta K = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 . [1 - \dfrac{m_1 + m_2}{4 m_2 \cos^2(\theta)}]$

c. $\Delta K = 0$ zodat: $\cos^2(\theta) = \dfrac{m_1 + m_2}{4 m_2} = \dfrac{m_1}{4 m_2} + \dfrac{1}{4} \geq \dfrac{1}{4}$ daaruit volgt:

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$

2a. Voor de komeet geldt: $T_k^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}(r_a + r_+)^3$ en voor de aarde:

$T_a^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}(2 r_a)^3$ zodat: $\left[\dfrac{T_k}{T_a}\right]^2 = \left[\dfrac{r_a + r_+}{2 r_a}\right]^3$

waaruit volgt: $r_+ = (2 \times 268^{2/3} - 1)\, r_a = 12,3 . 10^{12}\, m$

b. $r_+ = \dfrac{r_0}{1 - \varepsilon}$ *en* $r_a = \dfrac{r_0}{1 + \varepsilon}$ $\rightarrow$ $\varepsilon = \dfrac{r_+ - r_a}{r_+ + r_a} = \dfrac{12,3}{12,4} = 0,99$

$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (2$

met $r = \dfrac{L}{2}$

e n

$\dot{r} = \ddot{r} = 0$

volgt:

$= m\dfrac{L}{2}\dot{\theta}^2 + mg\sin(\theta) = m\dfrac{L}{2}3\dfrac{g}{L}\sin(\theta) + mg\sin(\theta) = \dfrac{5}{2}mgsi$

en

$= mg\cos(\theta) - m\dfrac{L}{2}\ddot{\theta} = mg\cos(\theta) - m\dfrac{L}{2}\dfrac{3}{2}\dfrac{g}{L}\cos(\theta) = \dfrac{1}{4}mgc$

VOORSTEL VOOR NORMERING TENTAMEN

			totaal
Opgave 1	a	4	
	b	2	
	c	3	9
Opgave 2	a	5	
	b	4	9
Opgave 3	a	2	
	b	2	
	c	3	
	d	2	9
Opgave 4	a	2	
	b	2	
	c	2	
	d	3	9

Cijfer = (aantal punten)/4 + 1
Rekenfouten: -0.5

VOORSTEL VOOR NORMERING TENTAMEN

			totaal
Opgave 1	a	4	
	b	2	
	c	3	9
Opgave 2	a	5	
	b	4	9
Opgave 3	a	2	
	b	2	
	c	3	
	d	2	9
Opgave 4	a	2	
	b	2	
	c	2	
	d	3	9

Cijfer = (aantal punten)/4 + 1
Rekenfouten: -0.5

VOORSTEL VOOR NORMERING TENTAMEN

			totaal
Opgave 1	a	4	
	b	2	
	c	3	9
Opgave 2	a	5	
	b	4	9
Opgave 3	a	2	
	b	2	
	c	3	
	d	2	9
Opgave 4	a	2	
	b	2	
	c	2	
	d	3	9

Cijfer = (aantal punten)/4 + 1
Rekenfouten: -0.5